

[1] 以下の問いに答えよ.

(1) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ とする. 座標平面上の 4 点 O, A, B, C を, O (0, 0), A (5, 0), B (5 cos α , 5 sin α), C (5 cos 3 α , 5 sin 3 α) とする.

(a) $\triangle OAB$ の面積は $\frac{\boxed{(1)}\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}}$, 辺 AB の長さは $\sqrt{\boxed{(4)}\boxed{(5)}}$ である.

(b) $\triangle OBC$ の面積は $\boxed{(6)}\boxed{(7)}$, 辺 BC の長さは $\boxed{(8)}$ である.

(c) 線分 AC の長さは $\frac{\boxed{(9)}\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}\sqrt{\boxed{(12)}\boxed{(13)}}$ である.

(2) 不等式

$$|m + n - 6| + |m - n - 2| \leq 6 \quad \dots\dots \quad \textcircled{1}$$

を満たす整数 m, n を考える. $(m + n - 6)(m - n - 2) \geq 0$ のとき, m と n が不等式 ① を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{(14)} \leq m \leq \boxed{(15)}$$

である. 同様に, $(m + n - 6)(m - n - 2) \leq 0$ のとき, m と n が ① を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{(16)}\boxed{(17)} \leq n \leq \boxed{(18)}$$

である. よって, m と n が ① を満たすとき, $(m - n)(m + n - 6)$ の最大値は,

$$(m - n)(m + n - 6) = \left(m - \boxed{(19)}\right)^2 - \left(n - \boxed{(20)}\right)^2$$

より $\boxed{(21)}\boxed{(22)}$ である.

[2] 数列 $\{a_n\}$ に対して

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3^k} \frac{(k+2)!}{(k-1)!} a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおくとき,

$$T_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つとする. ただし, $0! = 1$ である.

$$(1) \ a_1 = \frac{\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}\boxed{(25)}}, \ a_2 = \frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}} \text{ である.}$$

$$(2) \ n \geq 2 \text{ に対して } T_n - T_{n-1} = \boxed{(28)}n - \boxed{(29)} \text{ が成り立つから,}$$

$$a_n = r^n \frac{n - \boxed{(30)}}{(n+s)(n+t)(n+u)} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

である. ただし, ここに $r = \boxed{(31)}$ であり, $s < t < u$ として $s = \boxed{(32)}$,
 $t = \boxed{(33)}$, $u = \boxed{(34)}$ である.

$$(3) \ S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ とおく. } k \geq 2 \text{ に対して}$$

$$a_k = \frac{1}{\boxed{(35)}} \left\{ \frac{r^{k+1}}{(k+1)(k + \boxed{(36)})} - \frac{r^k}{(k+1)(k + \boxed{(37)})} \right\}$$

が成り立つから,

$$S_n = -\frac{\boxed{(38)}\boxed{(39)}}{\boxed{(40)}\boxed{(41)}} + \frac{r^{n+1}}{\boxed{(42)}(n+p)(n+q)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である. ただし, ここに $p < q$ として $p = \boxed{(43)}$, $q = \boxed{(44)}$ である.

[3] 2枚の硬貨を同時に投げることを試行という。各回の試行において、座標平面上の点Pは次の(A), (B), (C)に従って座標平面上を移動する。

(A) 点Pが (x, y) にあるとき、表が2枚出れば $(x+1, y+\sqrt{3})$ に移動する。

(B) 点Pが (x, y) にあるとき、裏が2枚出れば $(x+1, y-\sqrt{3})$ に移動する。

(C) 点Pが (x, y) にあるとき、表と裏が1枚ずつ出れば $(x-2, y)$ に移動する。

例えば、点Pが $(1, \sqrt{3})$ にあるとき、裏が2枚出れば、点Pは $(2, 0)$ に移動する。

(1) 1回目の試行前に原点にある点Pが、3回目の試行後に原点にある確率は

$$\frac{\boxed{(45)}}{\boxed{(46)}\boxed{(47)}} \text{である.}$$

(2) 1回目の試行前に原点にある点Pが、3回目の試行後に y 軸上にある確率は

$$\frac{\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}} \text{である.}$$

(3) 1回目の試行前に原点にある点Pが、5回目の試行後に x 軸上にある確率は

$$\frac{\boxed{(50)}\boxed{(51)}}{\boxed{(52)}\boxed{(53)}\boxed{(54)}} \text{である.}$$

(4) 1回目の試行前に原点にある点Pが5回目の試行後に x 軸上にあるとき、

$$8 \text{ 回目の試行後に円 } x^2 + y^2 = 4 \text{ 上にある条件付き確率は } \frac{\boxed{(55)}\boxed{(56)}}{\boxed{(57)}\boxed{(58)}\boxed{(59)}} \text{ である.}$$

[4] p を正の実数, m を自然数とし, 曲線 $y = -x^2$ 上の点 $(-p, -p^2)$ における接線と直線 $y = 2m$ の交点を P_m とする. P_m の x 座標が 1 以下となる m の最大値を N とする.

(1) P_m の x 座標を, p と m を用いて表せ.

(2) $N = 40$ が成り立つ p の範囲を求めよ.

以下, n を自然数とし, $a = 3n \log_3 6 - \log_3 2 + n$ とする.

(3) 3^a は 2 以上の自然数である. 3^a の素因数分解を, n を用いて書け.

(4) $p = 3^a$ のとき, $N < 2^{1000}$ となる自然数 n の最大値を求めよ. なお, 必要があれば $1.58 < \log_2 3 < 1.59$ を用いよ.

[5] 座標空間の原点 O を中心とする半径 1 の球面を C , 点 $M(4, 0, 0)$ を中心とする半径 2 の球面を D とする.

(1) p, q を実数とする. xy 平面上の直線 $y = px + q$ は, 球面 C と xy 平面が交わってできる円と点 A_1 で接し, 球面 D と xy 平面が交わってできる円と点 A_2 で接し, かつ, $0 < p < 1$ を満たすとする. p と q の値を求めよ.

(2) r, s を実数とする. zx 平面上の直線 $z = rx + s$ は, 球面 C と zx 平面が交わってできる円と点 B_1 で接し, 球面 D と zx 平面が交わってできる円と点 B_2 で接し, かつ, $r < -1$ を満たすとする. r と s の値を求めよ.

以下, 点 E は $\overrightarrow{A_1E} = (0, 0, 1)$ を満たすとし, 3 点 A_1, A_2, E を通る平面を α とする. また, 点 F は $\overrightarrow{B_1F} = (0, 1, 0)$ を満たすとし, 3 点 B_1, B_2, F を通る平面を β とする. α と β が交わってできる直線を ℓ とし, ℓ と xy 平面の交点を G , ℓ と zx 平面の交点を H とする.

(3) G の座標を求めよ.

(4) ℓ 上の点 T を, 実数 t を用いて $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OG} + t\overrightarrow{GH}$ と表す. $\triangle OMT$ の面積が最小となる t の値を求めよ.

[6] C を $y = 3x^2$ で定まる曲線とし, C 上に異なる 2 点 $A(a, 3a^2)$, $B(b, 3b^2)$ をとる.
ただし, $a < b$ とする.

(1) C と直線 AB で囲まれた図形の面積 S を, a と b を用いて表せ. ただし, 積分を用いて計算し, 解答欄には積分の計算過程も書くこと.

(2) 2 点 A, B 間の距離が 3 のとき, (1) で求めた面積 S の取りうる値の最大値 T を求めよ.

(3) 2 点 A, B 間の距離が 3 のとき, 直線 AB は点 $(0, 7)$ を通らないことを示せ.